

۶- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. نقطه‌ی (۰، ۲) در مختصات قطبی می‌کند. پس:

$$x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow r = a \cos(\theta) \Rightarrow a = 2$$

طبق نمودار، دوری تناوب تابع $\frac{2\pi}{3}$ است. پس:

$$T = \frac{2\pi}{|\omega|} = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow |\omega| = 3 \xrightarrow{b > 0} \omega = 3$$

$$a \times b = 2 \times 3 = 6$$

پس:

۲- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\sin 15^\circ = \sin(18^\circ - 3^\circ) = \sin 3^\circ \cos 15^\circ - \cos 3^\circ \sin 15^\circ$$

$$\cos 225^\circ = \cos(270^\circ - 45^\circ) = -\sin 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 225^\circ = \frac{\sin 225^\circ}{\cos 225^\circ} = \frac{\sin(270^\circ - 45^\circ)}{\cos(270^\circ - 45^\circ)} = \frac{-\cos 45^\circ}{-\sin 45^\circ} = 1$$

$$\cot 15^\circ = \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \frac{\cos(18^\circ - 3^\circ)}{\sin(18^\circ - 3^\circ)} = \frac{-\cos 3^\circ}{\sin 3^\circ} = -\frac{1}{\tan 3^\circ} = -\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow A = \frac{\frac{1}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{1 + 2} = \frac{1}{3}$$

۳- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\cos^{-1}(-x) \xrightarrow{-1 \leq x \leq 1} \pi - \cos^{-1}(x) \Rightarrow \cos^{-1}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$A = \pi - \cos^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi - \left(\cos^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$\sin^{-1}(x) + \cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{-1 \leq x \leq 1} A = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

۴- گزینه ۲ پاسخ صحیح است.

$$\cos^{-1}\left(\sin \frac{\pi}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\tan^{-1}\left(\cot\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = \frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2}$$

$$(1), (2) \Rightarrow A = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$$

۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است.

با توجه به نمودار و این‌که نقطه‌ی $(0, \frac{\pi}{2})$ مرکز تقارن تابع است، پس خط مفروض از نقطه‌ی $(0, \frac{\pi}{2})$ می‌گذرد.

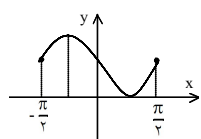


۷- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. در مثلث قائم‌الزاویه BAH بنابر قضیه‌ی تالس داریم:

$$\frac{MA}{MB} = \frac{OH}{OB}$$

$$\frac{MA}{MB} = \cos \alpha$$

پس خواهیم داشت $\cos \alpha$.



۸- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. تابع در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ کاملاً رسم شده است. پس دوری متناوب آن π است. الزاماً ضریب x عدد ۲ می‌باشد. تابع در ربع اول کم‌ترین مقدار را داشته است. پس الزاماً معادله‌ی آن به صورت $y = 1 - \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ است.

۹- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. عبارت را خلاصه می‌کنیم.

$$\sin(\pi - x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2\sin(x - \pi) = \sin(\pi - x) - \sin x + 2\sin(\pi - x)$$

$$= \sin x - \sin x + 2\sin x = 2\sin x$$

پس حاصل $2\sin x = 2(0.5) = 1$

۱۰- گزینه ۴ پاسخ صحیح است. عبارت مفروض را خلاصه می‌کنیم $\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1 + \cos x}{\sin x} = \frac{-1}{\sin x}$ یا توجه به بازه $\frac{\sqrt{\pi}}{6} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}$ و دایره مثلثاتی خواهیم داشت. $-1 \leq \sin x \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq -\sin x \leq 1$ در نتیجه $-\frac{1}{2} \leq \frac{-1}{\sin x} \leq 1$ یا $1 \leq \frac{-1}{\sin x} \leq 2$

$$F_1 = \frac{kq_1 q_2}{r^2} = \frac{\Delta k q_1 q_2}{r^2}$$

$$F_2 = \frac{kq_1 q_2}{r^2} \Rightarrow F_2 = \frac{k \epsilon (q_1 + q_2)}{r^2}$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\frac{k \epsilon (q_1 + q_2)}{r^2}}{\frac{k \times \epsilon (q_1 + q_2)}{r^2}} = \frac{r}{r} = 1 \Rightarrow \frac{q_1 + q_2}{q_1} = \frac{r}{r} \Rightarrow q_1 + q_2 = q_1 \Rightarrow q_2 = 0$$

$$F_1 = \frac{kq_1 q_2}{r^2} = \frac{\Delta k q_1 q_2}{r^2}$$

$$F_2 = \frac{kq_1 q_2}{r^2} \Rightarrow F_2 = \frac{k \epsilon (q_1 + q_2)}{r^2}$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{\frac{k \epsilon (q_1 + q_2)}{r^2}}{\frac{k \times \epsilon (q_1 + q_2)}{r^2}} = \frac{r}{r} = 1 \Rightarrow \frac{q_1 + q_2}{q_1} = \frac{r}{r} \Rightarrow q_1 + q_2 = q_1 \Rightarrow q_2 = 0$$

۱۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. از A تا B تراکم خطوط میدان بیشتر می‌شود، پس اندازه‌ی میدان الکتریکی افزایش می‌یابد. در جهت میدان حرکت می‌کنیم، پتانسیل الکتریکی کاهش می‌یابد. تغییر انرژی پتانسیل بار q از رابطه‌ی $\Delta U = q \Delta V$ به دست می‌آید. در این مورد q و ΔV هر دو منفی است. پس ΔU مثبت است. بنابراین انرژی الکتریکی افزایش می‌یابد.

۱۶- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. اگر ضلع مربع $a = \sqrt{2}$ باشد، فاصله‌ی q_1 از هر کدام از بارها، نصف قطر مربع یعنی برابر $\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} a = a$ خواهد شد. پس این فاصله برابر با $\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2} a = a$ خواهد شد.

$$F_{12} = F_{34} = \frac{k q_1 q_2}{r^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 10^{-10} \times 10^{-10}}{1^2} = 9 \times 10^{-11} \text{ N} = 9 \text{ nN}$$

بنابراین بزرگی برایند نیروهایی که از q_1 بر q_3 و q_4 وارد می‌شوند برابر با $\frac{1}{\sqrt{2}} \times 9 \text{ nN} = \frac{9}{\sqrt{2}} \text{ nN}$ خواهد شد. بار q_2 به تنهایی نیرویی به اندازه‌ی $F_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times 9 \text{ nN}$ بر بار q_4 وارد می‌کند. این دو نیروی ۱۸ نیوتونی بر هم عمودند، پس بزرگی برایند آن‌ها $1/\sqrt{2} \times 18$ خواهد شد.

۱۷- گزینه ۳ پاسخ صحیح است.

$$\sigma = \frac{q}{A} \Rightarrow q = \sigma A. \sigma = \frac{1}{4\pi R^2} \times \sigma = \frac{1}{4\pi} \times \frac{1}{R^2} \times \frac{1}{4\pi} \times 2\pi \times 10^{-6} = \frac{1}{4\pi} \times \frac{1}{R^2} \times \frac{1}{2\pi} \times 2\pi \times 10^{-6}$$

$$= 960 \times 10^{-6} \text{ C}$$

$$q = ne \Rightarrow 480 \times 10^{-6} = n \times 1.6 \times 10^{-19} \Rightarrow n = \frac{480 \times 10^{-6}}{1.6 \times 10^{-19}} = 3 \times 10^{15}$$

۱۸- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$q(\Delta V) = -W_E \Rightarrow (-8 \times 10^{-6}) (V_B - V_A) = -(32 \times 10^{-6})$$

$$\Rightarrow 8 (V_B - V_A) = 32 \Rightarrow V_B - V_A = \frac{32}{8} = 4$$

$$\Rightarrow V_D - 6 = 4 \Rightarrow V_B = 6 + 4 = 10 \Rightarrow V_B = 10 \text{ ولت}$$

۱۹- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

$$m_A = \tau m_B \Rightarrow I_A \cdot A_A = \tau I_B \cdot A_B \Rightarrow \frac{1}{2} I_A = \frac{1}{4} I_B \Rightarrow I_A = \frac{1}{2} I_B$$

$$R = \frac{\rho}{A} \Rightarrow \frac{1}{A_A} = \frac{1}{2} \frac{1}{A_B} \Rightarrow A_A = 2 A_B$$

$$V = IR, V_A = V_B \Rightarrow I_A = \frac{1}{2} I_B \Rightarrow I_B = 2 I_A$$

$$\Delta U + \Delta k = 0 \Rightarrow \Delta U = -\Delta m J \Rightarrow (V_B - V_A) q = -8 \times 10^{-3}$$

$$(V_B - V_A) \times (-4 \times 10^{-6}) = -8 \times 10^{-3} \Rightarrow V_B - V_A = 2 \times 10^3 \text{ V} = 2 \text{ kV}$$

نکته: حرکت آزاد بار منفی در جهت افزایش پتانسیل است، پس $V_B - V_A$ مثبت خواهد بود. تذکر: در این جا سؤال مقدار E و شکا مسئله استفاده نمی‌شود.

۱۲- گزینه ۳ پاسخ صحیح است. بزرگی میدان‌های حاصل از بارهای q و -q در نقطه‌ی M بام برابر است و جهت هر دو به سمت راست است و فاصله‌ی بارهای q و -q تا نقطه‌ی M برابر $\frac{d\sqrt{2}}{2}$ است و اگر میدان بار q را E_1 و میدان حاصل از -q را E_2 فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$E_1 = E_2 = \frac{kq}{r^2} = \frac{kq}{\left(\frac{d\sqrt{2}}{2}\right)^2} \Rightarrow E_1 + E_2 = \frac{2kq}{d^2}$$

فاصله‌ی بار الکتریکی $2q$ تا M برابر $\frac{d}{\sqrt{2}}$ است و اگر میدان حاصل از بار $2q$ را E_3 فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$E_3 = \frac{k(2q)}{\left(\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{2kq}{\frac{d^2}{2}} = \frac{4kq}{d^2} \Rightarrow E_3 \rightarrow E_1 + E_2$$

$$|E_1 + E_2| = |E_3| = \frac{4kq}{d^2}$$

و اگر به جای k، معادل آن $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ بگذاریم، خواهیم داشت:

$$E_T = \frac{\sqrt{2}q}{\pi\epsilon_0 d} \Rightarrow E_T = \sqrt{2} E_T \cos \theta \xrightarrow{\theta = 90^\circ} \sqrt{2} E_T = \frac{\sqrt{2}q}{\pi\epsilon_0 d}$$

۱۳- گزینه ۴ پاسخ صحیح است.

رابطه‌ی مورد استفاده در حل این مسأله به شکل زیر به دست می‌آید.

فرض کنیم بار +q در امتداد خط AB در میدان الکتریکی یکنواخت از A به B منتقل شود، خواهیم داشت:

$$V_B - V_A = \frac{-W_E}{q} = \frac{-F \times \Delta x + 1}{q} = \frac{-qE \times AB}{q} \Rightarrow V_B - V_A = -E \cdot AB$$

$$E = \frac{kq}{r^2}$$

$$E_1 = E_2 = \frac{9 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-6}}{1^2} = 36 \times 10^3 \frac{\text{N}}{\text{C}}, E_3 = \frac{9 \times 10^9 \times 4 \times 10^{-6}}{1^2} = 36 \times 10^3 \left(\frac{\text{N}}{\text{C}}\right)$$

$$E_{1,2} = 2E_1 \cos \frac{120^\circ}{2} \Rightarrow E_{1,2} = 2 \times 36 \times 10^3 \times \frac{1}{2} = 36 \times 10^3 \left(\frac{\text{N}}{\text{C}}\right)$$

$$E_{1,2} > E_3 \Rightarrow q' > 0 \Rightarrow E_3 + E' = E_{1,2}$$

$$\Rightarrow E' = \frac{kq'}{r^2} = (36 - 9) \times 10^3 = \frac{9 \times 10^9 \times q'}{1^2} = 27 \times 10^3$$

$$\Rightarrow q' = 3 \times 10^{-6} \text{ C} = 3 \mu\text{C}$$

